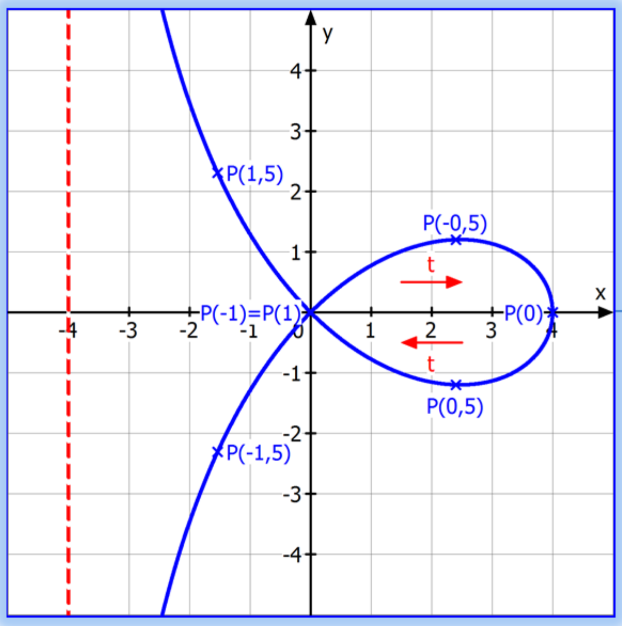


Strophoiden

Text Nr. 54125

Stand 17. April 2016

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Strophoiden sind wenig bekannte Kurven. Sie werden über eine geometrische Eigenschaft definiert und ergeben dann eine Schleifenform.

Die Kurvenuntersuchung ist aufwändig, und die Berechnung der Schleifenfläche führt zu einem grausigen Integral.

Die Methoden zu den Untersuchungen werden im 54011 Differentialgeometrie behandelt.

Inhalt

1 Vorschau

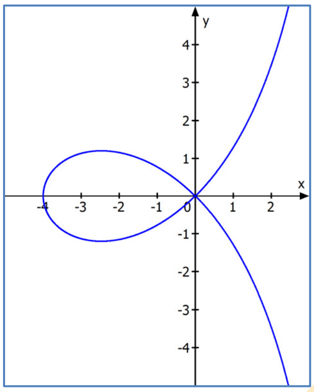
Koordinatengleichung: $y^2(a-x) = x^2(a+x)$ (algebraische Kurve 3. Grades)

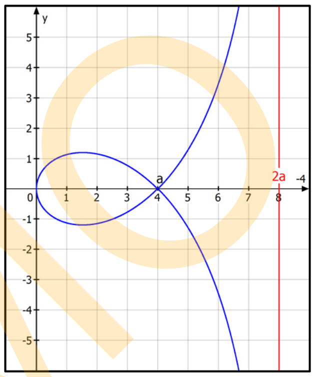
Ersatzfunktionen: $f_{12}(x) = \pm x \cdot \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

Gleichungen in Polarkoordinaten: $r = -\dfrac{a \cdot \cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)}$ oder $r = \dfrac{a}{\cos(\varphi)} - 2a \cdot \cos(\varphi)$

für $\varphi \in [0; \pi[\setminus \{\tfrac{1}{2}\pi\}$

Parametergleichung: $x(t) = a \cdot \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ und $y(t) = at \cdot \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$





Strophoiden in der rechts dargestellten Lage haben diese Gleichungen:

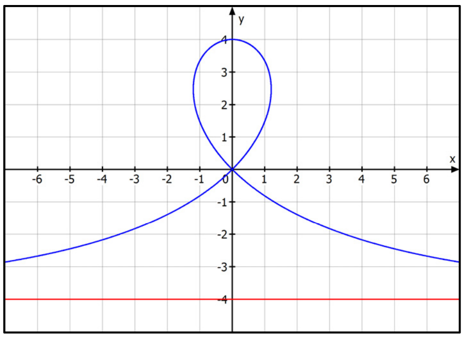
$$y^2(2a-x) = x \cdot (x-a)^2$$

$r(\varphi) = a \cdot \dfrac{1-\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ oder $r(\varphi) = a \cdot \dfrac{1+\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ allerdings für $\varphi \neq \tfrac{1}{2}\pi$

Oder für diese Lage: $x^2(a+y) = y^2(a-y)$

$$r(\varphi) = -a \cdot \frac{\cos(2\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

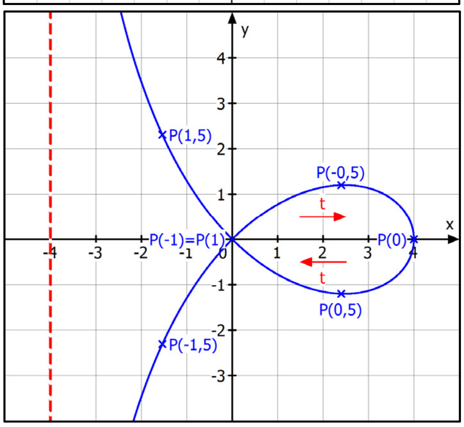
$x(t) = a \cdot t \cdot \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ und $y(t) = -a \cdot \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$



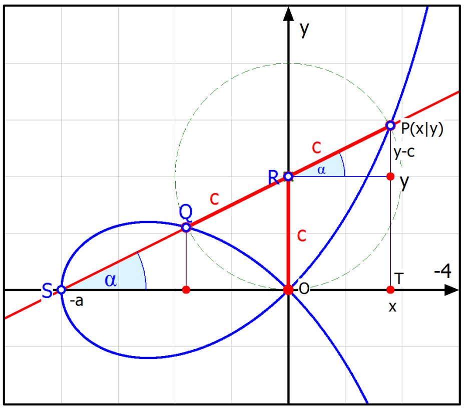
Oder so:

$x(t) = a \cdot \dfrac{1-t^2}{t^2+1}$ und $y(t) = at \cdot \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$

Zeichnung für a = 4.



2 Kurvengleichungen (1)



Die Punkte der Strophoide haben folgendes **Merkmal**:

Eine Gerade durch $S(-a\,|\,0)$ $\left(\alpha \neq 90^{\circ}\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right)$ schneidet die Kurve noch zweimal in P und Q und die y-Achse in R.
Das Merkmal für die Strophoide ist dann:

$$\overline{PR} = \overline{QR} = \overline{OR} \qquad (1)$$

Man kann also um R einen Kreis zeichnen, der dann durch P, Q und O geht. Sein Radius ist c.

(a) Herleitung der kartesischen Koordinatengleichung:

Nach Pythagoras gilt: $\overline{RP}^2 = x^2 + (y-c)^2$ und wegen $\overline{RP} = c$:

$$c^2 = x^2 + (y-c)^2$$

Nach dem 2. Strahlensatz gilt: $\dfrac{\overline{PT}}{\overline{ST}} = \dfrac{\overline{RO}}{\overline{SO}} \Leftrightarrow \dfrac{y}{x+a} = \dfrac{c}{a}$

Elimination von c mittels $c = \dfrac{ay}{x+a}$

$$\frac{a^2y^2}{(x+a)^2} = x^2 + \left(y - \frac{ay}{x+a}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2y^2}{(x+a)^2} = x^2 + \left(\frac{y(x+a)-ay}{x+a}\right)^2$$

$$\frac{a^2y^2}{(x+a)^2} = x^2 + \left(\frac{yx}{x+a}\right)^2 \quad | \cdot (x+a)^2$$

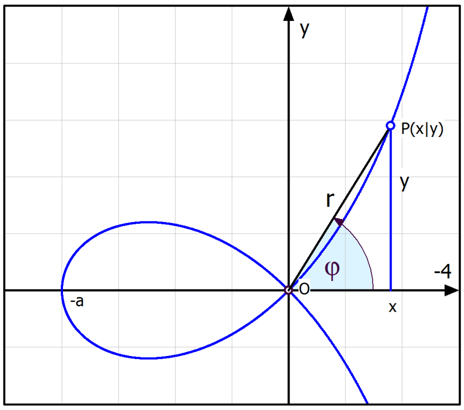
$$a^2y^2 = x^2(x+a)^2 + y^2x^2 \Leftrightarrow y^2\left(a^2 - x^2\right) = x^2(x+a)^2$$

$$y^2(a-x)(a+x) = x^2(a+x)^2 \qquad | : (a+x)$$

Ergebnis: $$y^2(a-x) = x^2(a+x) \qquad (2)$$

Man kann (2) nach y auflösen und erhält zwei Ersatzfunktionen: $f_{12}(x) = \pm x \cdot \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$, die als Wurzelfunktionen diskutierbar sind, und deren Graphen die Strophoide ergeben.

(b) Die Polarkoordinatengleichung:



$x = r\cdot\cos(\varphi)$ und $y = r\cdot\sin(\varphi)$ einsetzen in (2):

$$\cancel{r^2}\sin^2(\varphi)\cdot(a - r\cdot\cos(\varphi)) = \cancel{r^2}\cdot\cos^2(\varphi)\cdot(a + r\cdot\cos(\varphi))$$

$$a\cdot\sin^2(\varphi) - r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi) - a\cdot\cos^2(\varphi) - r\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos^2(\varphi) = 0$$

$$a\cdot\left[\sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi)\right] - r\cdot\cos(\varphi)\cdot\left[\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right] = 0$$

Wissen:

$$\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = \cos(2\varphi)$$
$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$$

Also: $$-a\cdot\cos(2\varphi) - r\cdot\cos(\varphi) = 0$$

Ergebnis: $$r = -\frac{a\cdot\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)} \qquad (3)$$

(c) **Parameterdarstellung dieser Strophoide:**

$$x(t) = a \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad \text{und} \quad y(t) = at \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \qquad (4)$$

Also gilt für alle Punkte der Strophoide: $y = t \cdot x$

Beweis:

Das Auffinden dieser Parametergleichungen ist schwer, daher gehe ich den Weg, dass ich beweise, dass diese Gleichungen zur Strophoide gehören. Ich gehe aus von dieser Kurvengleichung:

$$y^2(a - x) = x^2(a + x)$$

$$\left(at\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 \cdot \left(a - a \cdot \frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = \left(a \cdot \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 \left(a + a \cdot \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

$$a^2t^2 \cdot \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{at^2 + a - at^2 + a}{t^2+1}\right) = \left(a \cdot \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 \left(\frac{at^2 + a + at^2 - a}{t^2+1}\right)$$

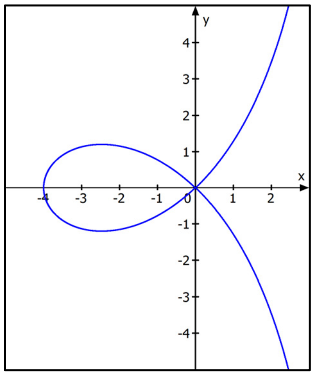
$$a^2t^2 \cdot \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{2a}{t^2+1}\right) = a^2\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 \left(\frac{2at^2}{t^2+1}\right) \quad | \cdot (t^2+1)^3$$

$$a^2t^2 \cdot (t^2-1)^2 \cdot 2a = a^2 \cdot (t^2-1)^2 \cdot 2at^2$$

Links und rechts steht derselbe Term, was zu beweisen war.

3 Kurvengleichungen (2) für andere Lagen der Strophoide.

(a) **Verschiebung der Strophoide** $y^2(a-x)=x^2(a+x)$ um a in x-Richtung, so dass der Scheitel in den Ursprung fällt.



Abbildungsgleichungen: $\begin{Bmatrix} x' = x + a \\ y' = y \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = x' - a \\ y = y' \end{Bmatrix}$

Einsetzen: $y'^2\left(a-(x'-a)\right)=(x'-a)^2\left(a+(x'-a)\right)$

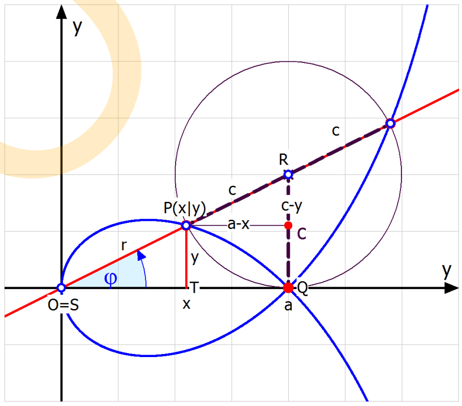
$y'^2\cdot(2a-x')=(x'-a)^2\,x'$

Ohne Striche: $y^2(2a-x)=x\cdot(x-a)^2$ (5)

2 Ersatzfunktionen: $f_{1,2}(x)=\pm(x-a)\cdot\sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}$

Man erkennt auch, dass $x=2a$ die Gleichung der senkrechten Asymptote ist.

(b) **Neue Herleitung aus den geometrischen Eigenschaften:**



(1) Pythagoras in PCR: $c^2=(a-x)^2+(c-y)^2$

(2) 2. Strahlensatz: $\dfrac{y}{x}=\dfrac{c}{a} \Rightarrow c=\dfrac{ay}{x}$

(2) in (1): $\dfrac{a^2y^2}{x^2}=(a-x)^2+\left(\dfrac{ay}{x}-y\right)^2 \quad | \cdot x^2$

$a^2y^2=(a-x)^2\cdot x^2+y^2(a-x)^2$ (6a)

$a^2y^2=(a-x)^2\cdot(x^2+y^2)$ (6b)

Die Gleichungen (5) und (6) sind äquivalent. Aus (6a) folgt:

$\cancel{a^2y^2}=(a-x)^2\cdot x^2+y^2\left(\cancel{a^2}-2ax+x^2\right) \Leftrightarrow 0=(a-x)^2\cdot x^2+y^2(-2a+x)\cdot x \quad |:x\neq 0$

$0=(a-x)^2\cdot x+y^2(-2a+x) \Leftrightarrow y^2(2a-x)=x\cdot(a-x)^2$ wobei $(a-x)^2=(x-a)^2$ ist.

(c) **Polarkoordinatendarstellung dazu:**

Im Dreieck OQR gilt: $\tan(\varphi)=\dfrac{c}{a} \Rightarrow c=a\cdot\tan(\varphi)$

und $\cos(\varphi)=\dfrac{a}{r+c} \Rightarrow r+c=\dfrac{a}{\cos(\varphi)} \Rightarrow r=\dfrac{a}{\cos(\varphi)}-c$.

Also $r=\dfrac{a}{\cos(\varphi)}-a\cdot\tan(\varphi)=\dfrac{a}{\cos(\varphi)}-a\cdot\dfrac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$

Ergebnis: $r(\varphi)=a\cdot\dfrac{1-\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ für $\varphi\neq\frac{1}{2}\pi$. (7a)

Hinweis: Die Strophoide wird auch durch die Gleichung

$r(\varphi)=a\cdot\dfrac{1+\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ (7b)

beschrieben …

(d) **Neue Lage: Drehung von** $y^2(a-x)=x^2(a+x)$ **um 270° um den Ursprung:**

Abbildungsgleichungen: $\begin{Bmatrix} x'=y \\ y'=-x \end{Bmatrix}$ Dabei wird der Scheitel $S(-a\,|\,0)$ abgebildet auf $S'(0\,|\,a)$

Zur Transformation einer Kurvengleichung muss man nach x und y umstellen und dann einsetzen:

$$\begin{Bmatrix} y=x' \\ x=-y' \end{Bmatrix}$$

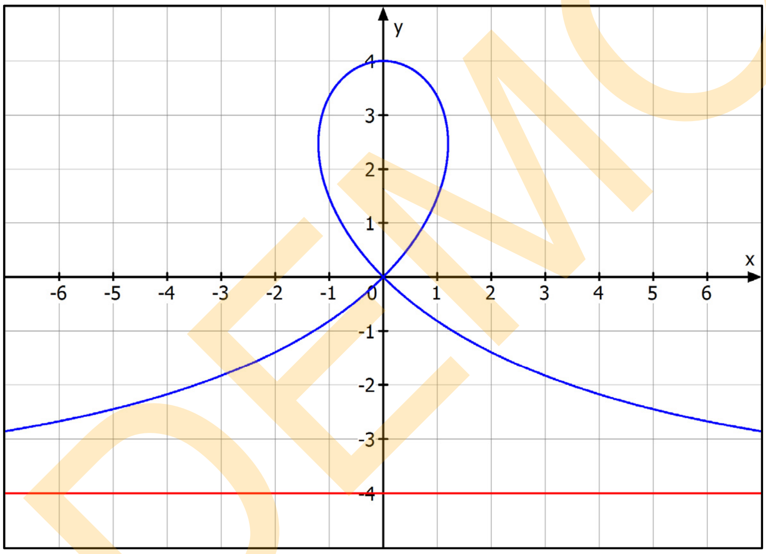
$$y^2(a-x)=x^2(a+x)\xrightarrow[\text{um }270^\circ]{\text{Drehumg}}x'^2(a+y')=y'^2(a-y')$$

bzw. ohne Striche: $x^2(a+y)=y^2(a-y)$ (8)

Die abgebildete Strophoide hat a = 4:

$$x^2(4+y)=y^2(4-y) \qquad \text{bzw.} \qquad 4x^2+x^2y+y^3-4y^2=0$$

In Polarkoordinaten: $r(\varphi)=-a\cdot\dfrac{\cos(2\varphi)}{\sin(\varphi)}$ (9)



Eine Parameterdarstellung dieser Strophoide ist:

$$x(t)=a\cdot t\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1} \quad \text{und} \quad y(t)=-a\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1} \qquad (10)$$

4 Eigenschaften der Strophoide $y^2(a-x)=x^2(a+x)$ bzw. $f_{12}(x)=\pm x\cdot\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$

a) **Symmetrieverhalten**

Diese Strophoide ist symmetrisch zur x-Achse, denn y kommt in der Gleichung nur quadratisch vor, sodass man y durch –y ersetzen kann. Mit $P(x\,|\,y)$ ist also auch $P'(x\,|\,-y)$ auf der Kurve.

b) **Definitionsbereich.**

Zur Untersuchung des Vorzeichens des Radikanden verwende ich eine Vorzeichentabelle.

Zunächst sei a > 0:

$a+x>0 \;\Leftrightarrow\; x>-a \;\Rightarrow$

$a-x>0 \;\Leftrightarrow\; x<a \;\Rightarrow$

	$x<-a$	$-a<x<a$	$x>a$
$a+x$	−	+	+
$a-x$	+	+	−
Rad	−	+	−

Der Radikand ist also ≥ 0 für $x\in[-a\,;a[\,=\mathbf{D}$

Nun sei a < 0, dann ist –a > 0!

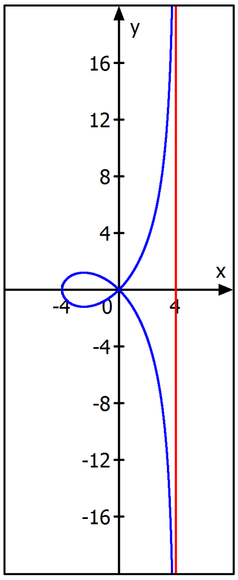
$a+x>0 \;\Leftrightarrow\; x>-a \;\Rightarrow$

$a-x>0 \;\Leftrightarrow\; x<a \;\Rightarrow$

	$x<a$	$a<x<-a$	$x>-a$
$a+x$	−	−	+
$a-x$	+	−	−
Rad	−	+	−

Der Radikand ist also ≥ 0 für $x\in\,]a\,;-a]\,=\mathbf{D}$

c) **Senkrechte Asymptote:** $x=a$



Ich betrachte nur noch den Fall a > 0: $f_{12}(x)=\pm x\cdot\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$

Der Nenner wird Null für $x\to a$, damit gilt $f_{1,2}(x)\to\pm\infty$

d) **Schnittpunkte mit der x-Achse:**

$f_{1,2}(x)=0$ für $x=0$ oder für $x=-a$: $N_1(0\,|\,0)$, $N_2(-a\,|\,0)$

e) **Ableitung von** $f_1(x)=x\cdot\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{ax^2+x^3}{a-x}}$

Grundformel: $\sqrt{u(x)}=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$$f_1'(x)=1\cdot\frac{\frac{(2ax+3x^2)\cdot(a-x)+1\cdot(ax^2+x^3)}{(a-x)^2}}{2\sqrt{\frac{ax^2+x^3}{a-x}}}=\frac{(2a^2x-2ax^2+3ax^2-3x^3+ax^2+x^3)\sqrt{a-x}}{2(a-x)^2\sqrt{ax^2+x^3}}$$

$$f_1'(x)=\frac{(2a^2x-2x^3+2ax^2)}{2(a-x)^{3/2}\sqrt{ax^2+x^3}}=\frac{a^2x-x^3+ax^2}{\sqrt{a-x}^3\cdot x\sqrt{a+x}}=\frac{a^2-x^2+ax}{\sqrt{a-x}^3\sqrt{a+x}}$$

f) **Waagerechte Tangenten / Extrempunkte**

$$f_1'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - x^2 + ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - ax - a^2 = 0$$

$$x_E = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} = a \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \begin{cases} 1{,}618\text{ a} \notin \mathbf{D} \\ -0{,}618\text{ a} \end{cases}$$

$$f_1(-0{,}618a) = \pm(-0{,}618a) \cdot \sqrt{\frac{a - 0{,}618a}{a + 0{,}618a}} = \mp 0{,}618a\sqrt{\frac{1 - 0{,}618}{1 + 0{,}6181}} \approx \mp 0{,}3\text{ a}$$

Bei unserer gezeichneten Kurve war a = 4, dann erhält man die Extrempunkte

$E_{1,2}(-2{,}472 \mid \mp 1{,}2)$.

g) **Senkrechte Tangente / Scheitelpunkt**

$f_1'(x) = \dfrac{a^2 - x^2 + ax}{\sqrt{a - x}^3 \sqrt{a + x}}$ hat für x = -a eine Polstelle, d.h. die Kurve hat dort eine senkrechte Tangente. Der Berührpunkt ist der Scheitelpunkt $S(-a \mid 0)$.

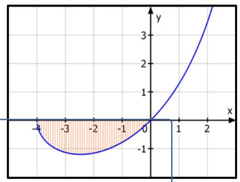
Man könnte nun meinen, dass auch für x = a eine senkrechte Tangente auftritt.

Da aber $x = a \notin \mathbf{D}$, bezieht sich die „unendliche“ Steigung auf die senkrechte Asymptote.

5. Berechnung der von der Strophoide eingeschlossenen Fläche

$$A=-2\cdot\int_{-a}^{0} x\cdot\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$$

Das Minuszeichen ist nötig, weil die Fläche unterhalb der x--Achse liegt.



Vereinfachung durch die **1. Substitution**: $u=\sqrt{a-x}$

Dann ist $du=\frac{-1}{2\sqrt{a-x}}dx \;\Rightarrow\; dx=-2\sqrt{a-x}\cdot du=-2u\cdot du$

Ferner benötigt man x: $u^2=a-x \;\Rightarrow\; x=a-u^2$

Dann wird $\sqrt{a+x}=\sqrt{a+a-u^2}=\sqrt{2a-u^3}$

Umrechnung der Grenzen: $x=-a \;\Rightarrow\; u=\sqrt{2a},\quad x=0 \;\Rightarrow\; u=\sqrt{a}$

$$A=-2\cdot\int_{-a}^{0} x\cdot\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=4\cdot\int_{\sqrt{2a}}^{\sqrt{a}}\left(a-u^2\right)\cdot\frac{\sqrt{2a-u^2}}{u}\cdot u\,du=-4\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}}\left(a-u^2\right)\sqrt{2a-u^2}\,du$$

Grenzen vertauscht

Jetzt wird ein Trick angewandt: $\sqrt{2a-u^2}=\sqrt{2a\left(1-\frac{u^2}{2a}\right)}=\sqrt{2a}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{u}{\sqrt{2a}}\right)^2}$

Insgesamt führt das zu: $A=-4\sqrt{2a}\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}}\left(a-u^2\right)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{u}{\sqrt{2a}}\right)^2}\,du$

Der Grund dafür ist der, dass man jetzt eine 2. (trigonometrische) Substitution anwenden kann:

Man setzt $\frac{u}{\sqrt{2a}}=\sin(z)$, was zu $u=\sqrt{2a}\cdot\sin(z)$ führt mit $du=\sqrt{2a}\cdot\cos(z)\cdot dz$

Umrechnung der Grenzen: $u=\sqrt{a} \;\Rightarrow\; \sin(z)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ also $z=\frac{1}{4}\pi$

$u=\sqrt{2a} \;\Rightarrow\; \sin(z)=1$, also $z=\frac{1}{2}\pi$.

Es folgt: $A=-4\cdot\sqrt{2a}\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(a-2a\cdot\sin^2(z)\right)\cdot\underbrace{\sqrt{1-\sin^2(z)}}_{\cos(z)}\cdot\sqrt{2a}\cdot\cos(z)\,dz$

$$A=-8a^2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(1-2\sin^2(z)\right)\cdot\cos^2(z)\,dz=-8a^2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\cos^2(z)-2\cdot\sin^2(z)\cdot\cos^2(z)\right)dz=$$

Ein weiterer Trick ist jetzt die Anwendung der Formel: $\sin(2\varphi)=2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$

Damit wird $\sin^2(\varphi)\cdot\cos^2(\varphi)=\frac{1}{4}\cdot\sin^2(2\varphi)$

$$A=-8a^2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\cos^2(z)-2\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\sin^2(2z)\right)dz=-8a^2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2(z)\,dz+4a^2\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^2(2z)\,dz$$

Der Formelsammlung entnimmt man diese Stammfunktionen:

$$\int\sin^2(ax)\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4a}\cdot\sin(2ax)$$

$$\int\cos^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\sin(x)\cdot\cos(x)\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)\right)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\cdot\sin(2x)$$

Damit folgt:

$$A=-8a^2\cdot\left[\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{4}\sin(2z)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}+4a^2\left[\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{8}\cdot\sin(4z)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$A=-8a^2\cdot\left[\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{4}\cdot0-\tfrac{1}{8}\pi-\tfrac{1}{4}\cdot1\right]+4a^2\cdot\left[\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{8}\cdot0-\tfrac{1}{8}\pi+\tfrac{1}{8}\cdot0\right]=-a^2\cdot\left(2\pi-\pi-2\right)+a^2\left(\pi-\tfrac{1}{2}\pi\right)=$$

$$A=-a^2\cdot\left(\pi-2-\tfrac{1}{2}\pi\right)=-a^2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\pi-2\right)=a^2\cdot\left(2-\tfrac{1}{2}\pi\right)$$

6 Die schiefe Strophoide

Sie wird durch die Gleichung

$$y^2(a-x)=x^2(a+x)+2x^2y\cdot\cos(\alpha)$$

beschrieben. α kennzeichnet die schiefe Lage.

Diese Andeutung soll genügen.